

## Domácí úlohy z prosemináře

### 1. příklad z písemky

1. Popiš Euklidův algoritmus. Zformuluj Bezoutovu větu a popiš, jak spočítat Bezoutovy koeficienty pomocí Euklidova algoritmu (nemusíš to psát příliš formálně, jde o to, aby bylo jasné, jak postup funguje).

2. Spočti  $\text{NSD}(238, 343)$  a najdi celá čísla  $x, y$  taková, že  $\text{NSD}(238, 343) = 238x + 343y$ .

3. Dokaž, že pro  $a, b \in \mathbb{N}$  platí  $\text{NSD}(a, b) \cdot \text{nsn}(a, b) = ab$ .

### 2. příklad z písemky

1. Dokaž, že pro  $a, b, c \in \mathbb{N}$  taková, že  $\text{NSD}(a, c) = 1$ , platí  $\text{NSD}(a, b) = \text{NSD}(a, b - a)$  a  $\text{NSD}(a, bc) = \text{NSD}(a, b)$ .

2. V závislosti na celém čísle  $n$  urči  $\text{NSD}(10n + 2, 4n - 1)$ .

3. Spočti  $(3^{21} - 1, 3^{13} - 1)$ .

### 3. příklad z písemky

1. Zformuluj malou Fermatovu větu a Eulerovu větu.

2. Spočítej  $42^{85} \pmod{17}$ .

3. Dokaž, že pro všechna  $k, l, m \in \mathbb{N}$  19 dělí  $70^{18k+1} + 26^{3l-1} + 46^{6m+2} + 2$ .

### 4. příklad z písemky

1. Najdi všechna celá čísla  $x$  taková, že  $5x \equiv 6 \pmod{17}$  a  $14x \equiv 21 \pmod{35}$ .

2. Najdi všechna celá čísla  $x$  taková, že  $7x \equiv 8 \pmod{12}$  a  $5x \equiv 9 \pmod{21}$ .

3. Najdi všechna celá čísla  $x$  taková, že  $4x \equiv 6 \pmod{16}$ ,  $x \equiv 5 \pmod{13}$  a  $5x \equiv 15 \pmod{25}$ .

### 5. příklad z písemky

1. Definuj Eulerovu funkci  $\varphi(n)$  a uveď vzoreček, jak ji obecně spočítat.

2. Spočítej  $\varphi(735)$ .

3. Buď  $p$  prvočíslo. Najdi všechna přirozená čísla  $m$  taková, že  $\varphi(pm) = p\varphi(m)$ .

### 6. příklad z písemky

1. Uveď vzoreček, jak obecně spočítat Eulerovu funkci  $\varphi(n)$ . Dokaž, že jsou-li  $m, n \in \mathbb{N}$  nesoudělná, platí  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ .

2. Najdi všechna přirozená čísla  $m$  taková, že  $\varphi(5^m) = 100$ .

3. Dokaž, že pro všechna přirozená čísla  $m$  platí  $\varphi(9m + 6) = \varphi(3m + 2)$ .

### 7. příklad z písemky

1. Zformuluj malou Fermatovu větu a Eulerovu větu.

2. Urči poslední cifru čísla  $2008^{2007^{2006}}$ .

3. Urči poslední dvě cifry čísla  $7^{999}$ .